

基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法

裴立业, 江桦, 麻曰亮

(解放军信息工程大学, 河南 郑州 450001)

摘 要: 针对压缩感知中噪声折叠现象严重影响稀疏信号重构性能的问题, 提出一种基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法。首先从理论上解释了压缩感知中噪声折叠现象; 然后提出一种基于测量数据的特征统计量, 推导分析其概率密度函数, 并基于此构造一种噪声滤波矩阵, 用于优化测量矩阵, 实现智能地选择信号分量、过滤噪声分量, 提高测量数据信噪比; 最后, 通过增加测量数据获取次数可进一步提升算法重构性能。仿真实验表明, 基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法明显改善了低信噪比条件下信号的重构性能。

关键词: 压缩感知; 信号重构; 噪声折叠; 选择性测量

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

Denoising recovery for compressive sensing based on selective measure

PEI Li-ye, JIANG Hua, MA Yue-liang

(PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: In order to reduce the effect of noise folding (NF) phenomenon on the performance of sparse signal reconstruction, a new denoising recovery algorithm based on selective measure was proposed. Firstly, the NF phenomenon in compressive sensing (CS) was explained in theory. Secondly, a new statistic based on compressive measurement data was proposed, and its probability density function (PDF) was deduced and analyzed. Then a noise filter matrix was constructed based on the PDF to guide the optimization of measurement matrix. The optimized measurement matrix can selectively sense the sparse signal and suppress the noise to improve the SNR of the measurement data, resulting in the improvement of sparse reconstruction performance. Finally, it was pointed out that increasing the measurement times can further enhance the performance of denoising reconstruction. Simulation results show that the proposed denoising reconstruction algorithm has a better improvement in the performance of reconstruction of noisy signal, especially under low SNR.

Key words: compressive sensing, signal reconstruction, noise folding, selective measure

1 引言

随着信息技术的飞速发展, 人们对信息量的需求越来越大, 携带信息的信号带宽也越来越宽, 以传统奈奎斯特采样定理为基础的信号处理框架对采样速率的要求也越来越高, 有时甚至高达数吉赫兹, 而现有硬件设备尚无法满足其对模数转换能力的要求^[1]。压缩感知^[2-4](CS, compressive sensing)作为一种新的信号处理理论, 为信号的数字化过程提供了一种新的选择。CS 理论指出: 如果信号是稀

疏的或可压缩的, 便可利用特定的测量矩阵将高维信号线性投影到一个低维空间, 且不会造成重要信息的丢失, 最后通过求解一个优化问题可以从低维测量数据中高概率重构出原始信号。在该理论框架下, 信号的采样速率不再取决于信号的带宽, 而与信号在信号中的表现形式密切相关, 从而极大降低了对采样速率的要求。目前, CS 理论已广泛应用于宽带频谱感知^[5-7]、图像处理^[8,9]等领域。

压缩感知的重构性能对噪声非常敏感, 即噪声的引入会大大降低压缩感知的重构性能。实际应用

收稿日期: 2016-07-08; 修回日期: 2016-10-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61401511)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.61401511)

环境下压缩感知面临的噪声主要分为 2 类：信号噪声和测量噪声。信号噪声是指压缩采样之前污染稀疏信号的噪声；测量噪声是指压缩采样之后污染测量数据的噪声。现阶段，大部分文献将信号噪声和测量噪声统一归纳为测量噪声进行处理。文献[10]利用 l_2 范数约束重构噪声，将稀疏重构问题转化为带约束的优化问题，提出去噪基追踪 (BPDN, basis pursuit denoising) 算法。在噪声功率已知的情况下，丹齐克选择 (DS, Dantzig selector) 算法^[11]也可较好地实现含噪信号的重构。为了提升算法的抗噪声性能，也有学者对贪婪类算法进行了多种改进，如规则化正交匹配追踪 (ROMP, regularized orthogonal matching pursuit)^[12]、子空间追踪 (SP, subspace pursuit)^[13]及压缩采样匹配追踪 (CoSaMP, compressive sampling matching pursuit)^[14]。近年来的研究^[15,16]表明，经过压缩测量，噪声功率会被成倍放大，严重影响稀疏信号的重构性能，这种现象被称为噪声折叠 (NF, noise folding) 现象。文献[15]指出白噪声经过压缩测量会变为有色噪声，影响信号重构，同时作者提出一种白化色噪声的方法。文献[17]分析了在欠采样情况下，噪声折叠现象对无线通信应用的影响，包括移动电话、数字广播、GPS 和 Wi-Fi 等。针对噪声折叠现象，文献[18]将最小 l_1 范数与迭代硬阈值算法相结合，降低噪声分量对重构性能的影响，提高选取正确支撑集的概率。CDS (compressive distilled sensing) 算法^[19,20]在迭代过程中，每一步都利用先前测量数据提供的信息，将后续测量数据聚焦到适当的信号子空间，用以提升测量数据的信噪比，然而该方法也是基于压缩采样后的数字信号处理。

已有的抗噪声算法的主要思路是：直接对包含噪声的信号进行压缩采样，之后在稀疏重构过程中利用数字信号处理技术抑制测量数据中的噪声分量，实现重构算法性能的提升。然而这种基于后端处理的稀疏重构算法对噪声折叠现象的抑制不理想。借鉴传统奈奎斯特采样理论中带通采样前利用抗混叠滤波器滤掉带外噪声的思想，本文提出一种基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法。首先，推导分析测量数据的概率统计特征，并基于此得到原稀疏信号各位置包含信号分量的概率，随后利用该信息指导测量矩阵的优化，在压缩测量过程中智能的选择信号分量、抑制噪声分量，从而从源头上滤除信号噪声，提高测量数据信噪比，为稀疏信号

重构打下良好基础。

2 压缩感知中噪声折叠现象

2.1 压缩感知理论基础

假设一实离散信号 $\mathbf{x} \in R^N$ 拥有少数个非零元素，则其被称为稀疏信号，非零元素个数 $K = \|\mathbf{x}\|_0$ 表示信号稀疏度，压缩测量是指构造一个合适的 $M \times N$ 维测量矩阵 Φ ，将高维信号 $\mathbf{x} \in R^N$ 线性投影到一个低维空间，得到测量数据 $\mathbf{y} \in R^M$ 。

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (1)$$

虽然从 \mathbf{y} 中恢复 \mathbf{x} 是一个病态问题，但若信号 \mathbf{x} 是稀疏的，且测量矩阵 Φ 满足 k -阶 RIP (restricted isometry property) 特性，则可以从低维空间 \mathbf{y} 中精确或以较高概率重构原信号。如果测量矩阵 Φ 满足 RIP 特性，则存在常数 $\delta_k \in [0,1)$ 满足

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2)$$

其中， \mathbf{x} 为任意稀疏度为 K 的稀疏信号。信号重构过程可表示为 l_0 范数意义下的优化问题

$$\min_{\mathbf{x} \in R^N} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3)$$

已有的求解方法主要包括 2 大类：凸松弛方法^[10,11]，通过线性规划方法求解；贪婪迭代算法，包括 OMP^[21]、ROMP^[12]以及 CoSaMP^[14]等。

2.2 噪声折叠现象

噪声折叠现象由信号噪声引起，故本文重点关注信号噪声，忽略测量噪声。假设信号噪声 $\mathbf{w} \in R^N$ 为高斯白噪声，且均值为 0，方差为 δ^2 ，故测量值 \mathbf{y} 可表示为

$$\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{w}) = \Phi \mathbf{x} + \Phi \mathbf{w} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (4)$$

为了方便地分析噪声折叠现象，测量矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$ 除满足 RIP 特性之外，本文对其做出 2 个假设。

1) 测量矩阵 Φ 行向量之间满足正交特性，且能量相等，即

$$\sum_{k=1}^N \phi_{i,k} \phi_{j,k} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ E, & i = j \end{cases} \quad (5)$$

2) 测量矩阵 Φ 列向量进行归一化处理，即

$$\sum_{i=1}^M \phi_{i,k}^2 = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

其中， $\phi_{i,k}$ 表示矩阵 Φ 的元素。由于压缩感知原理

要求每个测量数据尽可能多地包含原始信号信息，这就需要测量矩阵 Φ 的各行之间尽可能是正交的。现有测量矩阵中满足伯努利分布的 ± 1 矩阵、局部哈德玛矩阵等均满足行向量能量相等的假设，故上述假设具有合理性。

根据假设条件可知

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= \sqrt{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |\phi_{m,n}|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \|\Phi_{\cdot,n}\|_2^2} \\ &= \sqrt{\sum_{m=1}^M \|\Phi_{m,\cdot}\|_2^2} = \sqrt{M \|\Phi_{m,\cdot}\|_2^2} \end{aligned} \quad (7)$$

其中， $\phi_{m,n}$ 表示矩阵 Φ 的元素， $\Phi_{m,\cdot}$ 表示矩阵 Φ 的第 m 个行向量， $\Phi_{\cdot,n}$ 表示矩阵 Φ 的第 n 个列向量。

通过式(7)可知， $E = \|\Phi_{m,\cdot}\|_2^2 = \frac{N}{M}$ ，故 $\Phi\Phi^H = \frac{N}{M} I_M$ ，

其中， I_M 表示 M 维单位矩阵。

测量值的噪声分量 \mathbf{n} 协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= E(\mathbf{nn}^H) - E(\mathbf{n})E(\mathbf{n}^H) \\ &= E(\Phi\mathbf{w}\mathbf{w}^H\Phi^H) \\ &= \delta^2\Phi\Phi^H = \frac{N}{M}\delta^2 I_M \end{aligned} \quad (8)$$

故 $\delta_n^2 = \frac{N}{M}\delta^2$ ，即测量过程将原噪声分量方差放大

$\frac{N}{M}$ 倍，也就是噪声折叠现象。这主要因为压缩测量过程将与稀疏信号零分量对应的噪声混叠到信号中，造成了噪声的成倍放大。而稀疏信号经压缩测量之后功率基本保持不变，从而造成信噪比急剧下降，影响压缩感知重构性能。

3 算法理论分析

噪声折叠现象是低信噪比条件下压缩感知重构性能严重恶化的重要原因。已有重构算法大部分基于后端处理，即在压缩测量过程中先引入噪声，再利用信号处理方法去除噪声对重构算法的影响，而后端处理方式对噪声折叠现象的抑制不理想。本文从另一角度出发，采用传统奈奎斯特理论中带通采样前先利用抗混叠滤波器滤掉带外噪声的思想，在信号噪声被放大前先对其进行抑制，从而从源头上降低信号噪声对重构性能的影响。

3.1 系统和信号模型

本文重点考虑频域稀疏的信号，图 1 给出了本文算法的理论框架。

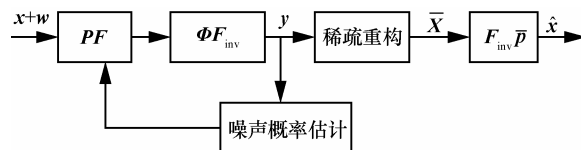


图 1 基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法理论框架

假设接收信号 $\mathbf{x} \in R^N$ 在频域稀疏，故其在频域的投影 $\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ 拥有 $K \ll N$ 个非零元素，且每个非零元素的幅度 $|X(i)|$ 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布，其中， \mathbf{F} 表示离散傅里叶变换 (DFT)， \mathbf{F}_{inv} 表示离散傅里叶逆变换 (IDFT)， K 表示稀疏度， \mathbf{w} 表示均值为 0，方差为 σ^2 的高斯白噪声，其在频域投影表示为 $\mathbf{W} = \mathbf{F}\mathbf{w}$ ， Φ 表示 $M \times N$ 维测量矩阵，元素服从均值为 0，方差为 $\frac{1}{M}$ 的高斯分布，即 $\Phi \sim N(0, \frac{1}{M})$ ， $\mathbf{P} \in R^{N \times N}$ 表示噪声滤波矩阵，用于抑制与稀疏信号零分量对应的噪声分量，其为对角矩阵，对角元素分别表示稀疏信号频域各位置包含信号分量的概率。 $\bar{\mathbf{P}} \in R^{N \times N}$ 表示矫正矩阵，为对角矩阵，其作用为消除压缩采用过程中噪声滤波矩阵对原始信号的影响。噪声滤波矩阵 \mathbf{P} 的构造为本文算法的核心部分，下面对其进行详细分析。

3.2 噪声滤波矩阵的构造及算法实现

压缩测量过程可表示为

$$\mathbf{y} = \Phi\mathbf{F}_{inv}\mathbf{P}\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{w}) \quad (9)$$

噪声滤波矩阵 \mathbf{P} 初始化为单位矩阵，故式(9)可化简为

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{w}) \\ &= \Phi(\mathbf{F}_{inv}\mathbf{X} + \mathbf{F}_{inv}\mathbf{W}) \\ &= \Theta(\mathbf{X} + \mathbf{W}) \end{aligned} \quad (10)$$

其中， $\Theta = \Phi\mathbf{F}_{inv}$ 表示感知矩阵， \mathbf{F}_{inv} 表示稀疏表示基，为 IDFT，由于 \mathbf{F}_{inv} 为酉矩阵，故 Θ 矩阵元素服从均值为 0，方差为 $\frac{1}{M}$ 的循环对称复高斯分布，即 $\Theta \sim CN(0, \frac{1}{M})$ 。利用测量数据可以得到一种新的特征统计量 \mathbf{R} 为

$$\mathbf{R} = \Theta^H \mathbf{y} = \Theta^H \Theta (\mathbf{X} + \mathbf{W}) \quad (11)$$

其中，当感知矩阵 Θ 满足 RIP 特性时， \mathbf{R} 与 \mathbf{X} 具有一定的似然性，故其被称为代理幅值。 \mathbf{R} 中元素可表示为

$$\begin{aligned}
 R(i) &= \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i (X(i) + W(i)) + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j (X(j) + W(j)) \\
 &= \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i) + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j X(j) + \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i W(i) + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j W(j)
 \end{aligned} \tag{12}$$

其中， $\boldsymbol{\theta}_i$ 表示感知矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 的第 i 列，由 $\boldsymbol{\theta} \sim CN(0, \frac{1}{M})$ 可知 $\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i$ 服从自由度为 M 的 χ^2 分布，当 M 很大时， $\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i$ 近似服从均值为 1，方差为 $\frac{1}{M}$ 的实高斯分布，即

$$\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i \sim N\left(1, \frac{1}{M}\right) \tag{13}$$

由于 $\mathbf{F}_{\text{inv}(i)} = \mathbf{F}'_{\text{inv}(N-i)}$ ，即 IDFT 矩阵的第 i 列与第 $N-i$ 列共轭相等，故 $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}'_{(N-i)}$ ，所以 $\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j$ 满足如下分布

$$\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j \sim \begin{cases} CN\left(0, \frac{2}{M}\right), i+j=N \text{ 且 } j \neq i \\ CN\left(0, \frac{1}{M}\right), i+j \neq N \text{ 且 } j \neq i \end{cases} \tag{14}$$

由于 $|X(i)| \sim U(a, b)$ ，当 $|X(i)| \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i)) = E(X(i)) \\ D(\Re(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i))) = D(\Im(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i))) \\ = \frac{1}{2M} \left(\frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \right) + \frac{(b-a)^2}{24} \end{cases} \tag{15}$$

其中， $\Re(\bullet)$ 表示取实部， $\Im(\bullet)$ 表示取虚部。当 $|X(i)| = 0$ 时，有

$$\begin{cases} E(\Re(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i))) = E(\Im(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i))) = 0 \\ D(\Re(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i))) = D(\Im(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i X(i))) \\ = \frac{1}{2M} \left(\frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \right) \end{cases} \tag{16}$$

通过 $\mathbf{w} \sim N(0, \sigma^2)$ 可知 $\mathbf{W} = \mathbf{F}\mathbf{w}$ 元素服从均值为 0，方差为 σ^2 的循环对称复高斯分布，故

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i W(i)) = E(\sum_{j \neq i} \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j W(j)) = 0 \\ D(\Re(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i W(i))) = D(\Im(\boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_i W(i))) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2M}\right) \sigma^2 \\ D(\Re(\sum_{j \neq i} \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j W(j))) = D(\Im(\sum_{j \neq i} \boldsymbol{\theta}_i^H \boldsymbol{\theta}_j W(j))) = \frac{N+1}{2M} \sigma^2 \end{cases} \tag{17}$$

本文用 H_0 表示 $|X(i)| = 0$ ， H_1 表示 $|X(i)| \neq 0$ 。

当 N 很大时，根据中心极限定理可知代理幅值 $R(i)$ 的实部、虚部近似服从高斯分布，即

$$\begin{cases} H_0: \Re(R(i)) \sim N(0, \sigma_{R_0}^2) \\ \Im(R(i)) \sim N(0, \sigma_{R_0}^2) \\ H_1: \Re(R(i)) \sim N(E(\Re(X(i))), \sigma_{R_1}^2) \\ \Im(R(i)) \sim N(E(\Im(X(i))), \sigma_{R_1}^2) \end{cases} \tag{18}$$

其中， $\sigma_{R_0}^2 \approx \frac{K \left(\frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \right)}{2M} + \left(\frac{1}{2} + \frac{N+2}{2M} \right) \sigma^2$,

$$\sigma_{R_1}^2 \approx \frac{K \left(\frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \right)}{2M} + \frac{(b-a)^2}{24} + \left(\frac{1}{2} + \frac{N+2}{2M} \right) \sigma^2$$

根据 $R(i)$ 概率分布特征可知，当 $|X(i)| = 0$ ，即在 H_0 情况下，特征统计量 $|R(i)|^2$ 服从自由度为 2，方差为 $\sigma_{R_0}^2$ 的 χ^2 分布，其概率密度函数 (PDF) 为

$$f(x|H_0) = \frac{1}{2\sigma_{R_0}^2} e^{-\frac{x}{2\sigma_{R_0}^2}} \tag{19}$$

当 $|X(i)| \neq 0$ ，即在 H_1 情况下，特征统计量 $|R(i)|^2$ 近似服从自由度为 2，方差为 $\sigma_{R_1}^2$ ，参数为 $\frac{a+b}{2}$ 的非中心 χ^2 分布，其 PDF 为

$$f(x|H_1) = \frac{1}{2\sigma_{R_1}^2} e^{-\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + x}{2\sigma_{R_1}^2}} I_0\left(\frac{a+b}{2\sigma_{R_1}^2} \sqrt{x}\right) \tag{20}$$

其中， $I_0(\cdot)$ 表示第一类 0 阶修正贝塞尔函数。

利用 Bayes 公式，用先验概率表示后验概率为

$$P(H_i|x) = \frac{f(x|H_i)P(H_i)}{f(x)}, i=0,1 \tag{21}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \frac{P(H_1|x)}{P(H_0|x)} &= \frac{f(x|H_1)P(H_1)}{f(x|H_0)P(H_0)} \\
 \Rightarrow P(H_1|x) &= \frac{f(x|H_1)P(H_1)}{f(x|H_0)P(H_0) + f(x|H_1)P(H_1)} \tag{22}
 \end{aligned}$$

信号的稀疏度为 K ，故 $P(H_1) = \frac{K}{N}$, $P(H_0) = \frac{N-K}{N}$ ，结合特征统计量 $|R(i)|^2$ 概率密度函数，式 (22) 等价于

$$P(H_1|x) = \frac{KI_0 \left(\frac{a+b}{2\sigma_{R_1}^2} \sqrt{x} \right)}{KI_0 \left(\frac{a+b}{2\sigma_{R_1}^2} \sqrt{x} \right) + (N-K) \frac{\sigma_{R_1}^2}{\sigma_{R_0}^2} e^{\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + x}{2\sigma_{R_1}^2} - \frac{x}{2\sigma_{R_0}^2}}}$$

(23)

根据式(23), 利用特征统计量 $|R(i)|^2$ 可以得到稀疏信号频域 i 位置包含信号分量的概率 p_i , 由此得

到噪声滤波矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_N \end{bmatrix}$.

构造噪声滤波矩阵的式(23)用到了多个变量, 主要为稀疏度 K , 信号平均幅度 $\frac{a+b}{2}$ 以及方差 $\sigma_{R_1}^2$ 和 $\sigma_{R_0}^2$ 。实际情况下, 式(23)所需变量不一定都能预先知道, 当某一变量未知时, 可以采用相关方法对其进行估计。文献[22]提出一种估计稀疏度 K 的方法。信号平均幅度 $\frac{a+b}{2}$, 方差 $\sigma_{R_1}^2$ 、 $\sigma_{R_0}^2$ 可利用广

义对数似然比检验方法估计得到。首先获取 S 个相互独立的观测数据 \mathbf{y}_s , 则 $\Re(X(i))$ 和 $\Im(X(i))$ 的最大似然估计可表示为 $\hat{X}_R(i)_{ML} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \Re(R_s(i))$,

$$\hat{X}_I(i)_{ML} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \Im(R_s(i)).$$

$\frac{a+b}{2}$ 的最大似然估计为 $\frac{\hat{a}+b}{2}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^K \text{sort}\left\{\sqrt{\hat{X}_R(i)_{ML}^2 + \hat{X}_I(i)_{ML}^2}\right\}}{K}$, 其中,

$\text{sort}\{\cdot\}$ 表示降序排列。估计变量 $\frac{a+b}{2}$ 时应用到的支撑集 i 组成集合 Ω , 剩余的支撑集 i 组成集合 Ω^c 。方差 $\sigma_{R_1}^2$ 和 $\sigma_{R_0}^2$ 的最大似然估计可分别表示为

$$\hat{\sigma}_{R_1, ML}^2 = \frac{\sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2S} \sum_{s=1}^S \left(\left\{ \Re(R_s(i)) - \hat{X}_R(i)_{ML} \right\}^2 + \left\{ \Im(R_s(i)) - \hat{X}_I(i)_{ML} \right\}^2 \right)}{K}$$

$$\hat{\sigma}_{R_0, ML}^2 = \frac{\sum_{i \in \Omega^c} \frac{1}{2S} \sum_{s=1}^S \left(\left\{ \Re(R_s(i)) - \hat{X}_R(i)_{ML} \right\}^2 + \left\{ \Im(R_s(i)) - \hat{X}_I(i)_{ML} \right\}^2 \right)}{N-K}$$

各参数在估计时可能存在偏差, 但这些偏差对

本文算法的影响有限, 这主要因为变量估计的偏差, 虽然会对式(23)计算结果 $P(H_1|x)$ 的准确度有所影响, 但不会改变式(23)针对特征统计量 $|R(i)|^2$ 的单调递增性, 所以较大的特征值 $|R(i)|^2$ 仍然对应较大的 $P(H_1|x)$, 也就保证了本文算法对噪声的抑制作用, 提高了测量数据的信噪比。

原有压缩感知算法利用测量矩阵对稀疏信号频域每个位置进行相同的感知, 不管其包含的是信号分量还是噪声分量, 都造成了噪声折叠现象。而本文算法根据本节构造的噪声滤波矩阵可以智能地对每个频域位置包含的信息进行压缩测量, 如果该频域位置包含信号分量的概率较大, 就增大对其的压缩感知力度, 使其在测量数据中的信息量变大, 反之, 则降低对其的感知力度, 减少其在测量数据中的信息量, 从而达到降低噪声分量对测量数据影响的目的, 提升压缩测量数据的信噪比, 降低噪声折叠现象的影响, 最终实现重构性能的提升。

综上所述, 现将基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法步骤归纳如下。

步骤 1 初始化噪声滤波矩阵 \mathbf{P} 为单位矩阵, 根据式(10)获取测量数据 \mathbf{y} 。

步骤 2 利用测量数据 \mathbf{y} 计算特征统计量 $|R(i)|^2$ 及其概率密度函数, 并利用式(23)计算得到原稀疏信号频域每个位置包含信号分量的概率 p_i 。

步骤 3 根据步骤 2 所得 p_i , 更新噪声滤波矩阵 \mathbf{P} , 根据式(9)重新获取测量数据 \mathbf{y} 。

步骤 4 利用测量数据 \mathbf{y} 和感知矩阵 $\Phi \mathbf{F}_{inv}$ 重构出稀疏信号 $\bar{\mathbf{X}}$, 根据稀疏信号 $\bar{\mathbf{X}}$ 的支撑集修改噪声滤波矩阵 \mathbf{P} , 与信号 $\bar{\mathbf{X}}$ 支撑集对应的噪声滤波矩阵 \mathbf{P} 对角元素改为其倒数, 其余元素设为 0, 组成矫正矩阵 $\bar{\mathbf{P}}$, 最终得到原始信号的重构结果 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{inv} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{X}}$ 。

3.3 算法性能与复杂度分析

本文去噪重构算法的优势主要体现在利用选择性测量结构提升测量数据信噪比, 从而改善算法重构性能。本文提出的选择性测量结构对测量数据信噪比的提升可利用式(19)、式(20)和式(23)近似得到。噪声滤波矩阵的主要作用是抑制噪声分量, 选择信号分量, 其作用可简单表示为

$$\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{P}(\mathbf{X} + \mathbf{W}) \tag{24}$$

其中, $\tilde{\mathbf{X}}$ 和 $\tilde{\mathbf{W}}$ 分别表示滤波后信号和噪声, \mathbf{X} 和 \mathbf{W} 分别表示滤波前信号和噪声, \mathbf{P} 表示噪声滤波矩阵。不失一般性, 假设信号 \mathbf{X} 非零元素位置为: $1, 2, \dots, K$, 即 $X_i \neq 0, i=1, 2, \dots, K$, X_i 表示向量 \mathbf{X} 第 i 个元素。根据式(24)可知: $\|\tilde{\mathbf{X}}\|_2^2 = (p_1 X_1)^2 + (p_2 X_2)^2 + \dots + (p_K X_K)^2$, $\|\tilde{\mathbf{W}}\|_2^2 = (p_1 W_1)^2 + (p_2 W_2)^2 + \dots + (p_N W_N)^2$ 。由于 $\mathbf{w} \sim N(0, \sigma^2)$, 故 $W_1^2 \approx W_2^2 \approx \dots \approx W_N^2$, 为计算方便, 假设非零元素 X_i 幅值近似相等。故

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{\mathbf{X}}\|_2^2}{\|\tilde{\mathbf{W}}\|_2^2} &= \frac{(p_1 X_1)^2 + (p_2 X_2)^2 + \dots + (p_K X_K)^2}{(p_1 W_1)^2 + (p_2 W_2)^2 + \dots + (p_N W_N)^2} \\ &= \frac{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_K^2) X_i^2}{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2) W_i^2} \\ &= \frac{N(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_K^2) \|\mathbf{X}\|_2^2}{K(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2) \|\mathbf{W}\|_2^2} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\tilde{\mathbf{X}}\|_2^2}{\|\tilde{\mathbf{W}}\|_2^2} = \frac{N(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_K^2)}{K(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2)} \frac{\|\mathbf{X}\|_2^2}{\|\mathbf{W}\|_2^2} \quad (26)$$

其中, p_i 根据式(23)可得。基于式(19)和式(20)可知, 在 H_0 情况下, 特征统计量 $|R(i)|^2$ 期望为 $2\sigma_{R_0}^2$, 在 H_1 情况下, 特征统计量 $|R(i)|^2$ 期望为 $2\sigma_{R_1}^2 + |X_i|^2$ 。利用特征统计量 $|R(i)|^2$ 期望值可分别近似估计噪声滤波矩阵元素 p_i , 且 $p_1 \approx p_2 \approx \dots \approx p_K$, $p_{K+1} \approx p_{K+2} \approx \dots \approx p_N$, 故式(26)可进一步化简为

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{X}}\|_2^2}{\|\tilde{\mathbf{W}}\|_2^2} \approx \frac{N p_1^2}{K p_1^2 + (N-K) p_{K+1}^2} \frac{\|\mathbf{X}\|_2^2}{\|\mathbf{W}\|_2^2} \quad (27)$$

由于 $2\sigma_{R_1}^2 + |X_i|^2 > 2\sigma_{R_0}^2$, $p_1 > p_{K+1}$, 所以滤波之后信号信噪比提升明显, 验证本文基于选择性测量结构的去噪重构算法的有效性。

下面简单分析算法的计算复杂度。根据 3.2 节归纳总结的算法实现步骤可以发现, 在步骤 4 利用重构算法恢复稀疏信号之前, 算法计算复杂度主要包括 3 部分, 分别为 2 次测量数据的获取和噪声滤

波矩阵的计算。获取测量数据的计算复杂度为 $O(MN)$ 。噪声滤波矩阵的计算复杂度分为 2 部分: 一部分为特征统计量 $|R(i)|^2$ 的获得, 获得单个特征统计量的计算复杂度为 $O(M)$, 本文算法需要 N 个特征统计量用于估计噪声滤波矩阵, 故该部分计算复杂度为 $O(MN)$; 另一部分根据式(23)计算稀疏信号频域每个位置包含信息分量的概率 p_i , 其中, 第一类 0 阶修正贝塞尔函数可通过查表快速得到, 且式(23)中乘法次数有限, 故其计算复杂度较小。重构算法以计算复杂度较低的 OMP 算法为例, 其计算复杂度仍为 $O(KMN)$, 所以相对于重构算法, 本文去噪重构算法增加的计算复杂度非常有限。故本文提出的基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法的计算复杂度主要由所选重构算法的计算复杂度决定。

3.4 多次测量提升噪声滤波矩阵构造精度

3.1 节到 3.3 节介绍了单次测量时噪声滤波矩阵的构造过程, 并基于此总结归纳了去噪重构算法实现步骤。通过分析噪声滤波矩阵的构造过程可以发现, 噪声滤波矩阵 \mathbf{P} 的构造主要基于特征统计量 $|R(i)|^2$ 及其概率密度函数。在稀疏信号支撑集不变的前提下, 通过增加测量次数可成倍降低特征统计量 $|R(i)|^2$ 的方差, 提高稀疏信号频域每个位置包含信号分量概率 p_i 的计算准确度, 提升噪声滤波矩阵对噪声折叠现象的抑制程度, 从而改善算法重构性能。通过以上分析可知, 将单次测量去噪重构算法向多次测量扩展, 仅需将 3.2 节算法步骤 1 中获取单次测量数据 \mathbf{y} 变为获取多次测量数据的均值 $\bar{\mathbf{y}}$, 用于提升噪声滤波矩阵的构造精度, 后续步骤无需改变。

4 实验结果与分析

本文利用 Matlab 平台进行仿真实验。仿真实验参数设置如下: 稀疏信号长度 $N=1024$, 稀疏度 $K=40$, 稀疏表示基为离散傅里叶逆变换矩阵 \mathbf{F}_{inv} , 信号在频域的非零元素位置随机改变, 且非零元素幅值 $|X(i)|$ 在 $[10, 16]$ 上服从均匀分布, 测量数据长度 $M=512$, 测量矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$ 为高斯随机矩阵, 其元素服从均值为 0, 方差为 $\frac{1}{M}$ 的高斯分布。信号噪声 \mathbf{w} 均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯白噪声, 信号噪声方差 σ^2 由信噪比 SNR 确定, SNR 在后续实验中直接

给出。本文信噪比定义为稀疏信号功率与信号噪声功率之比： $SNR = 10 \lg \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \right)$ 。本文选择归一化均

方误差 (NMSE, normalized mean square error) 和重构成功概率作为算法性能评价标准，其中，

$$NMSE = E \left\{ \frac{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \right\}, \mathbf{x} \text{ 表示原信号, } \hat{\mathbf{x}} \text{ 表示重构}$$

信号；若重构信号支撑集与原信号频域非零元素位置相匹配，则认为本次实验信号重构成功。本文实验共采用 3 种重构算法对含有信号噪声的稀疏信号进行重构，并对其重构性能进行对比。重构算法分别为：OMP 算法、 L_1+IHT 算法和本文提出的去噪重构算法 (denoising OMP)。OMP 算法的具体实现过程参照文献[21]， L_1+IHT 算法的具体实现过程参照文献[18]，本文在 3.2 节已给出 denoising OMP 算法的具体实现过程。仿真结果均通过 1 000 次蒙特卡洛实验得到。

图 2 给出了不同信噪比条件下，利用本文

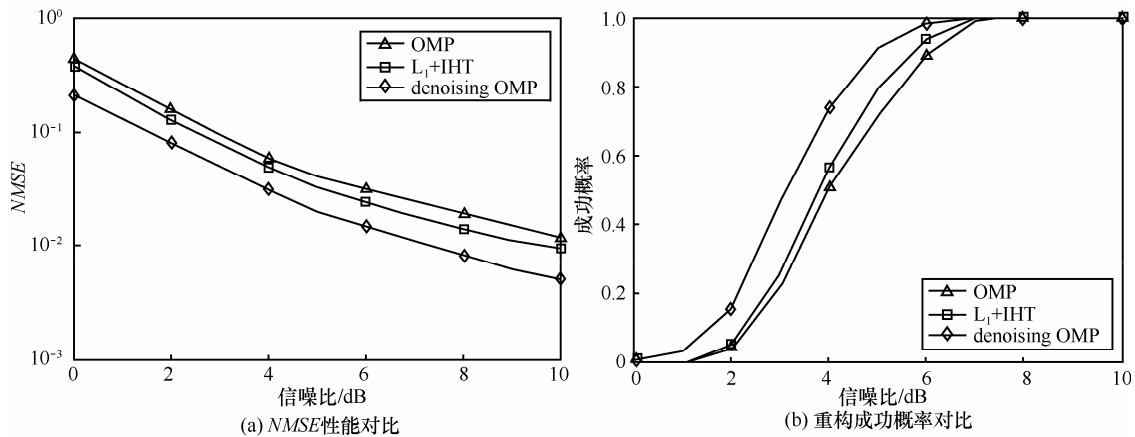


图 2 不同信噪比条件下重构性能对比

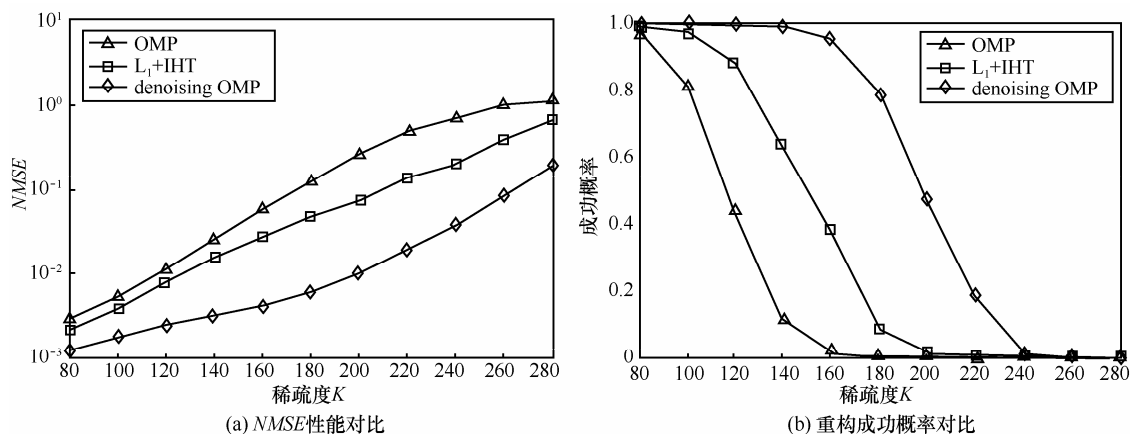


图 3 不同稀疏度条件下重构性能对比

denoising OMP 算法与 OMP 算法和 L_1+IHT 算法对稀疏度 $K=40$ 的原信号进行重构的性能对比。如图 2 所示，随着信噪比的增加，3 种算法重构性能都有所提升，但本文 denoising OMP 算法明显优于另外 2 种重构算法。 L_1+IHT 算法基于后端数字信号处理抑制噪声影响，而本文算法在噪声放大前利用噪声滤波矩阵对其进行抑制，通过对比说明本文提出的基于前端处理的噪声抑制结构优于已有的后端处理结构。

图 3 给出了信号稀疏度 K 不同情况下，本文 denoising OMP 算法与 OMP 算法和 L_1+IHT 算法的重构性能曲线，其中，信噪比 $SNR=20$ dB。仿真结果表明，随着稀疏度 K 的变大，3 种算法重构性能都有所下降，这主要是因为随着 K 的变大，感知矩阵 Θ 的 RIP 特性会变差，影响重构性能。图 3 中，当稀疏度达到 80 时，OMP 算法重构成功概率快速下降， L_1+IHT 算法重构性能在稀疏度大于 100 后也明显下降，而本文 denoising OMP 算法在稀疏度为 160 时，重构成功概率仍然大于 95%，表明相同条

件下, 本文去噪重构算法可重构信号的稀疏度范围更广, 性能更优。

3.4 节指出压缩测量次数的增加, 可以成倍降低特征统计量 $|R(i)|^2$ 的方差, 提升稀疏信号频域每个位置包含信号分量概率 p_i 的计算准确度, 最终改进本文算法重构性能。图 4 给出了仿真实验验证, 其中, 稀疏度 $K=40$, 信噪比分别为 0 dB 和 -2 dB。通过仿真曲线可以看出随着压缩测量次数的增加, 重构性能有较大改善, 尤其是在信噪比较低的情况下, 验证了理论分析的正确性。所以, 当本文去噪重构算法性能不理想时, 可以通过增加压缩测量次数进一步改善算法重构性能。

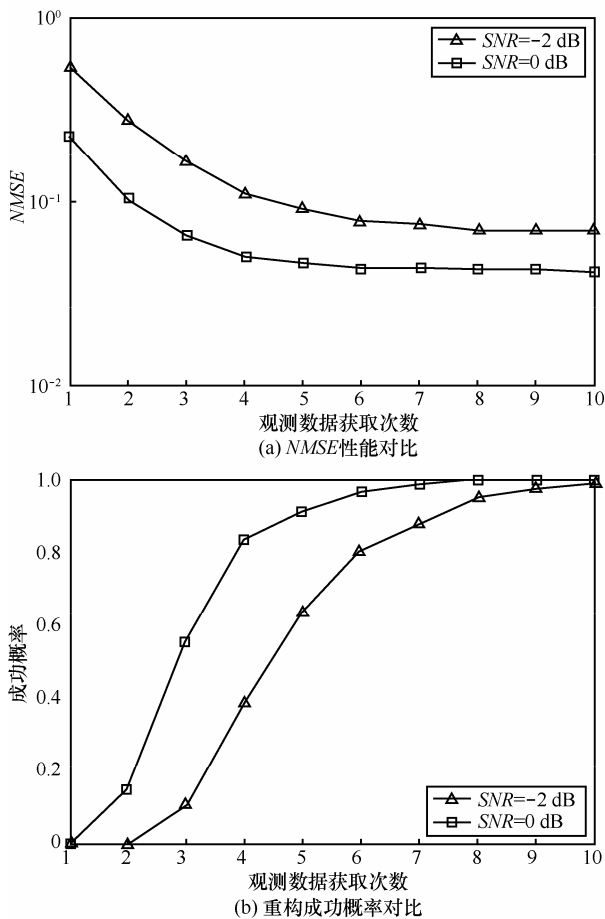


图 4 不同压缩测量次数条件下重构性能对比

5 结束语

压缩感知理论中噪声折叠现象的存在, 直接造成了传统重构算法对信号噪声的敏感性。针对以上问题, 本文提出一种基于选择性测量的压缩感知去噪重构算法, 从源头上抑制信号噪声的影响。首先

提出一种新的特征统计量, 利用压缩测量数据, 结合概率统计知识推导得到该特征统计量概率密度函数, 之后利用 Bayes 公式推导得到稀疏信号频域各位置包含信号分量的概率, 并基于此构造出噪声滤波矩阵 \mathbf{P} , 用于指导优化测量矩阵, 实现有选择地测量稀疏信号, 抑制信号噪声, 改善压缩重构性能。本文还指出通过增加压缩测量次数可进一步抑制信号噪声, 改善压缩重构性能。仿真实验表明, 相比于传统重构算法, 本文去噪重构算法具有更好的重构性能, 包括成功概率和归一化均方误差。本文算法的应用环境为高斯白噪声, 在更复杂的多径衰落信道下如何有效构造噪声滤波矩阵有待进一步研究。

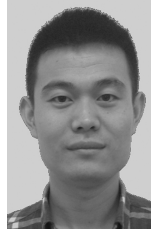
参考文献:

- [1] SUN H, NALLANATHAN A, WANG C X, et al. Wideband spectrum sensing for cognitive radio networks : a survey[J]. IEEE Wireless Communications, 2013, 20(2): 74-81.
- [2] CANDÈS E J, WAKIN M N. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2):21-30.
- [3] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [4] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1561-1662.
- [5] JIAO L C, YANG S Y, LIU F, et al. Development and prospect of compressive sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(7): 1561-1662.
- [6] 王伟刚, 杨震, 顾彬. 基于观测矩阵优化的自适应压缩频谱感知[J]. 通信学报, 2014, 35(8): 33-39.
- [7] WANG W G, YANG Z, GU B. Adaptive compressed spectrum sensing based on optimized measurement matrix[J]. Journal on Communications, 2014, 35(8): 33-39.
- [8] 田文飏, 付争, 芮国胜. 基于分治试探的盲自适应匹配追踪重构算法[J]. 通信学报, 2013, 34(4): 180-186.
- [9] TIAN W B, FU Z, RUI G S. Blind adaptive matching pursuit algorithm for signal reconstruction based on sparsity trial and error[J]. Journal on Communications, 2013, 34(4): 180-186.
- [10] JIN S, ZHANG X. An efficient method for collaborative compressive spectrum sensing in cognitive radio networks[C]//IEEE Global Communications Conference. 2014: 834-839.
- [11] ZHAO H H, WANG Y N, PENG X J, et al. Gradient-based compressive sensing for noise image and video reconstruction[J]. IET Communications, 2015, 9(7): 940-946.
- [12] KRAHMER F, WARD R. Stable and robust sampling strategies for compressive imaging[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(2): 612-622.
- [13] DONOHO D L, TSAIG Y. Extensions of compressed sensing[J] Signal Processing, 2006, 86(3): 533-548.
- [14] CANDÈS E J, TAO T. The dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n [J]. Annals of Statistics, 2007, 35(6): 2313-2353.

- [12] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Signal recovery from inaccurate and incomplete measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 310-316.
- [13] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230-2249.
- [14] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26(3): 301-321.
- [15] CASTRO E S, ELDAR Y C. Noise folding in compressed sensing[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(8): 478-481.
- [16] TREICHLER J, DAVENPORT M A, BARANIUK R G. Application of compressive sensing to the design of wideband signal acquisition receivers[C]//In 6th U.S./Australia Joint Workshop on Defense Applications of Signal Processing, 2009.
- [17] ALMEROOTH B, KRONE S, FETTWEIS G. Analyzing the signal to noise ratio of direct sampling receivers[C]//IEEE International Conference on Communications. Budapest, 2013: 4561-4565.
- [18] PETER S, ARTINA M, FORNASIER M. Damping noise folding and enhanced support recovery in compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(22): 5990-6002.
- [19] HAUPT J, CASTRO R, NOWAK R. Distilled sensing: adaptive sampling for sparse detection and estimation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(9): 6222-6235.
- [20] HAUPT J, BARANIUK R, CASTRO R, et al. Compressive distilled sensing: sparse recovery using adaptivity in compressive measurements[C]//In Proceedings of the 43rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 2009: 1551-1555.
- [21] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [22] WANG Y, TIAN Z, FENG C Y. Sparsity order estimation and its

application in compressive spectrum sensing for cognitive radios[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(6): 2116-2125.

作者简介:



裴立业 (1987-), 男, 河北石家庄人, 解放军信息工程大学博士生, 主要研究方向为通信信号处理、频谱感知。



江桦 (1956-), 男, 江苏南通人, 解放军信息工程大学教授、博士生导师, 主要研究方向为通信信号处理、认知无线电。



麻白亮 (1992-), 男, 吉林长春人, 解放军信息工程大学硕士生, 主要研究方向为压缩感知、信号检测。